Colegio Las Américas
Depto. de Matemáticas
Prof. Héctor Romero L.
Primer Semestre 2020

GUÍA Nº4 II MEDIO

Meta: Ejercitar sobre la operatoria básica el conjunto de los irracionales (Raíces).

Actividades de proceso

1. Ordena de menor a mayor los siguientes números irracionales:

$$2\sqrt{5};\ 4\sqrt{2};\ 2\sqrt{3};4\sqrt{3}$$

Para ordenar números representados con raíces cuadradas, una técnica apropiada consiste en elevar al cuadrado cada número y ordenarlos según corresponda al orden de los valores obtenidos.

$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$

$(4\sqrt{2})^2 = 4^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 16 \cdot 2 = 32$

$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = \boxed{}$

$(4\sqrt{3})^2 = \boxed{}$

Ordena los números obtenidos de menor a mayor.

$$12 < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{}$$

Y luego, los números irracionales en el mismo orden.

$$2\sqrt{3} < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{}$$

Ayuda

Cuando a, $b > 1$, se cumple que:

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

El símbolo "$\Leftrightarrow$" indica doble condicionalidad. En el caso anterior, se puede interpretar como: "cuando $a < b$, necesariamente se cumple que $a^2 < b^2$".

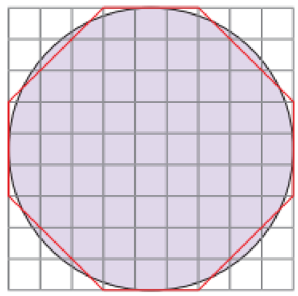
Colegio Las Américas
Depto. de Matemáticas
Prof. Héctor Romero L.
Primer Semestre 2020

Matemática e historia

Aproximación del número π

Existen números irracionales que no corresponden a raíces cuadradas. Uno de los más importantes es π, número que relaciona la medida del diámetro de una circunferencia con su longitud, o también el área de un círculo con la de su cuadrado circunscrito.

El escriba Ahmes, en Egipto, estimó su valor, el cual está registrado en el papiro Rhind, que data del siglo XVI a. C.



Para ello, consideró un cuadrado de 9 unidades de lado, que fue dividido en 81 partes. Luego, para transformarlo en un polígono de 8 lados, cortó en cada vértice esquinas de lado 3 unidades, tal como se muestra en la imagen.

Se puede ver que el área del polígono corresponde a 18 cuadraditos menos que el cuadrado grande es decir, $81 - 18 = 63$ cuadraditos, un área un poco menor que la del círculo. Por lo tanto, Ahmes estimó que el área del círculo sería de 64 cuadraditos.

El radio de este círculo es 4,5 unidades, por lo que, si se aplica la fórmula para el área, se obtiene que:

$$\pi \cdot 4{,}5^2 \approx 64 \rightarrow \pi \approx \frac{64}{20{,}25} \rightarrow \pi \approx 3{,}16$$

¿Es posible mejorar esta aproximación usando la misma estrategia? Explica.

Y él ¿quién es?

Leonhard Paul Euler (1707-1783)

Este matemático y físico suizo fue uno de los más influyentes y prolíficos de la historia; se estima que sus obras completas tendrían una extensión de entre 60 y 80 volúmenes. Realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos, e introdujo gran parte de la notación matemática, como los números e, i y π. Además, se le conoce por sus grandes aportes en la mecánica, la óptica y la astronomía.

2. La propiedad que conserva el orden al elevar al cuadrado también es útil para aproximar números expresados con raíces cuadradas, mediante acotaciones sucesivas.
Por ejemplo, para acotar $\sqrt{10}$:

a. Decide entre qué números naturales está $\sqrt{10}$ observando las raíces cuadradas exactas.

$$\sqrt{1} = 1 \qquad \sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{16} = 4$$

Como 10 se encuentra entre $\square$ y $\square$, $\sqrt{10}$ está entre $\square$ y $\square$.

b. Para mejorar la aproximación, busca un número entre los dos anteriores, calcula su cuadrado y compáralo con los demás valores:

Por ejemplo, al escoger 3,5, y calcular su cuadrado: $3{,}5^2 = 12{,}25$:

$$9 < 10 < 12{,}25 \qquad 3 < \sqrt{10} < 3{,}5$$

Repite el proceso, escogiendo algún número entre 3 y 3,5 $\square$. Luego, calcula su cuadrado $\square$ para comparar.

$$\square < 10 < \square \qquad \square < \sqrt{10} < \square$$

Usa calculadora
Para explorar

Ayuda

En general, al aproximar, hay siempre una diferencia con el valor real llamada **error**.

Si al aproximar un número cualquiera el número obtenido es menor, se ha aproximado por **defecto**. En cambio, si es mayor, se ha aproximado por **exceso**.

Cuando de los dos valores posibles se ha considerado aquel con el que se comete el menor error, se ha aproximado por **redondeo**.

Por ejemplo, para aproximar $\sqrt{10}$ a la centésima:

- $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, por defecto,
- $\sqrt{10} \approx 3{,}17$, por exceso,
- $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, por redondeo.

c. Nuevamente, escoge un número $\square$, calcula su cuadrado $\square$ y compara:

$$\square < 10 < \square \qquad \square < \sqrt{10} < \square$$

d. Si utilizas la calculadora $\sqrt{10} = 3{,}162277660168...$, ¿cuántos decimales correctos obtuviste con tu aproximación?, ¿dirías que es una buena aproximación? Justifica.

____

____

____

1. Determina una aproximación de los siguientes números, aplicando el método de aproximación por acotación sucesiva.

a. $\sqrt{6}$

b. $\sqrt{13}$

c. $\sqrt{27}$

d. $\sqrt{62}$

e. $\sqrt{90}$

f. $\sqrt{185}$

g. $\sqrt{240}$

h. $\sqrt{350}$

2. Ordena ascendentemente los siguientes números reales.

a. $\sqrt{26}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{721}{200}$; $3{,}601$

b. $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{4}{8}$; $0{,}\overline{56}$

c. $\sqrt{6}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{49}{20}$; $2{,}42$

d. $3\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$; $\frac{13}{2}$; $4{,}2$

e. $\sqrt{10}$; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}$; $2{,}5$

f. $2\sqrt{8}$; $\sqrt{15}$; $\frac{22}{5}$; $4{,}0\overline{8}$

3. Representa en una recta numérica, mediante construcción geométrica, el número real pedido en cada caso.

a. $\sqrt{2}$

b. $\sqrt{5}$

c. $\sqrt{10}$

d. $\sqrt{37}$

e. $\sqrt{50}$

f. $\sqrt{17}$

4. Responde las preguntas en tu cuaderno.

a. ¿Para qué crees que sirve aproximar? Explica con tus palabras.

b. ¿Es igual redondear que truncar? Explica utilizando un ejemplo.

c. Para determinar una mejor aproximación de un número, ¿se debe redondear o truncar? Justifica.

d. ¿Crees que los métodos vistos anteriormente sirven para aproximar raíces cúbicas?, ¿por qué?